Première épreuve écrite de mathématiques, filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposé, divisé en trois parties, touchait des domaines variés du programme : équations différentielles linéaires, séries numériques, séries entières, fonctions intégrables, espaces préhilbertiens, endomorphismes autoadjoints...

La longueur et la difficulté du sujet semblent avoir troublé les candidats , mais un barème équilibré entre les différentes parties a permis un bon étalement des notes de 0 à 20 avec une moyenne de l'ordre de 8,2. En particulier, il a valorisé l'aptitude à savoir mener un calcul, à donner les résultats sous la forme demandée (sans oublier les simplifications), sous réserve d'avoir les connaissances théoriques permettant de traiter avec soin un échantillon raisonnable des 22 questions du problème. Cependant plus de 15 % des notes sont inférieures ou égales à 4, c'est à dire que dans ces copies moins de 2 questions non évidentes sont rédigées correctement. Cette remarque donne l'impression que plus de 15% des candidats abordent cette épreuve sans un minimum de préparation : soit ils s'arrêtent dès la première difficulté (par exemple les expressions des a_n dans les premières questions de la première partie ou l'évaluation de la dérivée seconde d'une fonction composée dans la deuxième partie), soit ils ne s'aperçoivent pas qu'ils font "fausse route" et écrivent de nombreuses pages pour rien.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

1) Question parfois non traitée ou dans certaines copies on rajoute la non nullité du coefficient de y'.

2-a) Si la grande majorité des candidats donne la relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, certains n'arrivent pas à exprimer correctement a_n en fonction de a_0, n et μ (erreurs de calculs, lecture incomplète de la question donc oubli d'introduire (2n) ! simplifications du type

$$a_n = a_0 \frac{2^n}{8^n (2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (16k^2 - \mu)$$ non effectuées).

2- b) Cette question facile sur le rayon de convergence d'une série entière a donné lieu à une utilisation d'un théorème de d'Alembert. Le cas particulier des polynômes est souvent oublié.

3) a) La détermination d'un équivalent de a_n a été discriminante car seulement une petite minorité de candidats a été capable d'utiliser l'expression du coefficient du binôme C_{4n}^{2n} , de donner la formule de Stirling et de simplifier sans erreur des puissances et des factorielles.

3- b) Peu de candidats pensent à démontrer la convergence normale de la série entière φ sur l'intervalle $[-1,1]$; les autres montrent la convergence normale sur tout compact de $]-1,1[$, l'existence de f(1) et f(-1) et ils justifient la continuité de f sur l'intervalle $[-1,1]$ par le "théorème de la double limite" qui n'existe pas dans le cadre du programme PC .

3- c) Si la démonstration de f de classe C^1 est évidente, lors de l'utilisation du critère spécial de convergence des séries alternées, il est insuffisant (pour éviter de prouver la décroissance de $|na_n|$) d'utiliser l'équivalent de a_n. Dans peu de copies, on trouve une majoration uniforme du reste partiel sur $[-1,0]$.

4-a) Beaucoup de candidats essayent de convaincre les correcteurs qu'une fonction continue et majorée sur $[0,1]$ admet un prolongement par continuité en 1. Quelques candidats pensent à utiliser la croissance de g mais très peu le polynôme : $\sum_{n=0}^{N} b_n x^n$. Enfin, le symbole $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ est utilisé avant d'en établir son existence ainsi que le théorème de la double limite.

4- b) Dans les quelques copies où la série de terme général na_n est divergente, le 4a) est bien utilisé.

Partie II

1) La détermination de l'équation différentielle (F) a été gratifiante car beaucoup de candidats se trompent dans la dérivée seconde de $Z(\theta^{-1}(x))$.

2) Certains candidats ayant trouvé comme équation différentielle (F) : $16z'' - z = 0$ affirment, sans se poser de question, que $\cos(\frac{t}{4})$ et $\sin(\frac{t}{4})$ sont solutions de (F).

3) La condition sur $\varphi(0)$ a été trouvée sans difficulté ce qui n'a pas été le cas de $\varphi'(0)$.

Partie III

1) Cette application directe du cours n'a pas toujours été bien traitée et on a pu lire des affirmations comme : "le produit de deux fonctions intégrables est intégrable". La majorité des candidats a fait une étude au voisinage de 0 et 1 en oubliant les cas particuliers $f(0)g(0) = 0$ et $f(1)g(1) = 0$. Peu de candidats pensent à la majoration $\left|\frac{f(x)g(x)}{\sqrt{x(x-1)}}\right| \leq \frac{M}{\sqrt{x(x-1)}}$.

2) L'intégration par parties est souvent effectuée sans prendre de précautions aux bornes 0 et 1.

3) Peu de candidats ont démontré que $(Df \mid f) \geq 0$, beaucoup pensent qu'un endomorphisme symétrique a ses valeurs propres positives.

4) Le noyau est rarement trouvé ; les candidats qui passent par la résolution de l'équation différentielle s'arrêtent à $f'(x) = \frac{C}{\sqrt{x(1-x)}}$; par contre il était plus facile de prouver (DfPf) 7 f' = 0.

5) La première partie était évidente et la seconde de même nature que 4).

6) Si la première partie était à la portée de tous les candidats , pour traiter la seconde il fallait avoir fait la deuxième question de la première partie. Dans la troisième, peu de candidats ont pensé à décomposer h sur les fonctions polynomiales T_q .

7) Question abordée dans quelques copies le théorème de Pythagore est rarement utilisé.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Pour aborder avec succès ce type de problème qui peut paraître long et difficile les candidats doivent :

1) s'entraîner à calculer rapidement et efficacement car c'est souvent sur des calculs simples que l'on assure un minimum de points ;

2) connaître les définitions et théorèmes fondamentaux ;

3) être capable de faire des raisonnements précis, ce qui évitera à certains candidats de rédiger des démonstrations parsemées de " j'ai du me tromper" ou même de "Bof".