Première épreuve écrite de mathématiques, filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le problème portait sur la détermination de l'ensemble des valeurs propres d'un opérateur différentiel du 2è ordre. Il a causé bien des soucis aux candidats ; certains se sont manifestement découragés, ne parvenant ni à maîtriser les calculs initiaux ni les questions de convergence uniforme qui suivaient. Toutefois une troisième partie facile et un barème généreux ont permis un bon étalement des notes. Le début nécessitait un peu d'aisance dans le maniement de formules de récurrence avec factorielles, et dans celui de notions de base sur les séries entières, leur rayon de convergence et la convergence normale. La faiblesse en calcul d'une grande partie des candidats s'est révélée préoccupante ; quant à la convergence uniforme, on ne voit pas comment les réponses de la majorité auraient pu être pires si elle ne l'avait jamais étudiée. Les nouveaux horaires et programmes ne permettent guère d'approfondir ; c'est particulièrement sensible en ce qui concerne la convergence uniforme et il semble bien qu'il y ait un décrochage dans son assimilation. Les connaissances des candidats tendent à devenir superficielles et ils se trouvent à la merci d'erreurs sans nombre sur des questions aussi classiques que la convergence d'intégrales impropres très simples, nous y reviendront plus loin.

I) REMARQUES PARTICULIERES

I1) Au lieu de simplement discuter l'annulation du facteur $x^2 - x$, de nombreux candidats ont introduit d'absurdes équations caractéristiques.

I2) Les élèves ont eu énormément de mal à établir des formules correctes et un peu d'entraînement au calcul leur aurait évité de consacrer un temps et une énergie démesurés à ce démarrage. On est étonné du nombre de copies où les candidats ne prennent pas la peine de simplifier une expression du type $2^n / 8^n$. Il faut également les persuader que lorsqu'on leur demande de calculer l'expression de a_n ils doivent s'y tenir et ne pas se contenter de donner celle de a_{n+1}.

I3) N'arrivant pas à déterminer a, certains devinent et admettent l'inégalité a > 1 pour pouvoir continuer, parfois avec une naïveté rafraîchissante : "si je me souvenais de la formule de Stirling, j'aurais sans doute trouvé a > 1 ". Beaucoup trop peu voient clairement que la convergence normale sur [-R,+R] assure la continuité sur cet intervalle. Comme nous l'avons déjà dit, c'est un échec majeur de l'apprentissage de la convergence uniforme. Au c), de nombreux candidats affirment que si une suite est équivalente à une suite décroissante elle est aussi décroissante, mais cette erreur n'est bien sur pas nouvelle.

I4) Le raisonnement le plus sûr consistait à écrire que ^ $_{0}^{n}b_n x^n$ est majoré pour 0 £ x < 1 donc l'est pour 0 £ x £ 1. Donc ^ $_{0}^{n}b_n$ est majoré, ce qui assure la convergence. Seule une toute petite minorité d'élèves manie avec sécurité de tels raisonnements de base. On souhaite ne pas voir les élèves se référer à des énoncés aussi flous que "le théorème de la double limite".

II1) Ce petit calcul de changement de variable était crucial et différenciait beaucoup les candidats.

II2) Il est navrant de voir ceux arrivant faussement à l'équation 16z" - z = 0 conclure sans sourciller à l'existence de solutions sinusoïdales au lieu de profiter d'une lecture attentive de l'énoncé pour se corriger. Une telle absence de recul critique a été sévèrement sanctionnée.

III1) Cette question très classique a entraîné des erreurs innombrables. Elle mettait bien en évidence la compréhension ou l'incompréhension de la notion d'intégrabilité. Le constat d'ensemble est assez inquiétant. Beaucoup affirment qu'un produit de fonctions intégrables est intégrable. D'autres se contentent de majorer sans valeur absolue des fonctions de signe quelconque. Quelques uns croient même qu'une fonction continue sur]0,1[y est toujours intégrable. Une forte minorité donne pour équivalent $\frac{f(0)g(0)}{\sqrt{x}}$ sans se donner le mal d'étudier le cas où cette expression est nulle. L'étude du théorème de convergence dominée, maintenant faite en classes préparatoires, devrait pourtant aider les candidats à avoir le réflexe de majorer une fonction continue sur un compact par sa borne supérieure.

III2) En général, l'intégration par parties est vue ; mais on écarquille les yeux devant une copie qui propose le changement de variable f(x)=g(x).

III3) Une majorité affirme à tort qu'un opérateur autoadjoint a toujours ses valeurs propres positives. Par contre, les correcteurs ont admis l'affirmation sans justification qu'un tel opérateur avait ses valeurs propres distinctes, puisque l'argument du cours ne dépend manifestement pas de la finitude de la dimension. On ne peut plus être aussi indulgent quand les candidats parlent ensuite de la matrice de l'endomorphisme et de sa diagonalisation.

III4) Certains candidats montrent la relation $f'(x) = \frac{c}{\sqrt{x-x^2}}$ mais peu ont le sang-froid de conclure à C = 0 du fait qu'on travaille dans un espaces de fonctions C^1.

III5) L'abaissement possible du degré n'est pas compris, mais c'était bien sûr un point délicat.

III6) Les parties a) et b) étaient faciles et bien des candidats l'ont vu.

III7) La dernière question était l'occasion de prendre un instant de recul pour faire la synthèse du problème.

III) <u>CONSEIL AUX CANDIDATS</u>

Le conseil le plus important est assez difficile à suivre : c'est celui de ne pas s'affoler si un problème présente des difficultés dans sa partie initiale et si on a le sentiment de n'en maîtriser qu'une faible part. Les autres candidats ne sont peut-être pas mieux lotis et le barème en tiendra compte. La troisième partie était l'occasion de reprendre pied. Une bonne proportion en était facile et indépendante du reste et des candidats ont ainsi obtenu des notes très raisonnables malgré un début manqué. Un autre point important est que des calculs conséquents et menés à terme sont payants et différencient beaucoup les candidats.