

Seconde épreuve écrite de mathématiques, filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposé cette année avait pour objet l'étude des zéros d'une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire d'ordre deux forme réduite $y'' + qy = 0$: Théorème de Sturm (II), Majoration du nombre de zéros (III).

Le sujet ne nécessitait que des connaissances simples et concrètes d'analyse réelle.

Raisonnements concernant l'étude de fonctions (variations zéros, manipulations d'intégrales), calculs simples et questions de cours alternaient. Ceci aurait dû permettre à une grande majorité de candidats de mettre en valeur leurs acquis et de produire des copies dignes du niveau du Concours Commun.

Hélas ! ce fut loin d'être le cas. Un barème très généreux n'a pu empêcher la moyenne de l'épreuve de descendre vers 7,5. A titre d'exemple, un candidat traitant correctement la première partie obtenait 17 sur 20. Mais un barème aussi généreux soit-il ne peut compenser une proportion inquiétante de copies "presque vides".

Il semble que bon nombre de candidats n'aient eu qu'une pratique sommaire des mathématiques. Peut-être pensent-ils que cette matière ne leur sera que de peu d'utilité dans leurs futures études ou futures carrières...

II) REMARQUES PARTICULIERES

Première Partie

1°) a) Quelques candidats se trompent déjà (dérivation par rapport à c).

b) Question rarement traitée correctement, bien que ce soit du cours. Invoquer le théorème du relèvement ne suffit pas ; encore faut-il en vérifier les hypothèses (fonction C^1 à valeurs dans v ou C^1) dans le cercle unité ou dans C^* .

c) Le début de cette question devait permettre aux candidats de prendre confiance. Malheureusement certains se perdent dans des lignes de calculs pour trouver la valeur de u (erreurs avec les formules $\sin(wt + f)$ ou $\cos(wt + f)$... et une très grande majorité "trouve" $q(t) = wt$ alors qu'il était simplement question de trouver le module d'un complexe. La valeur de q sur $\left[0, \frac{p}{2w}\right]$ était semble-t-il le maximum que l'on puisse demander.

d) Question très révélatrice... On rencontre le "raisonnement" suivant : "Vérifions avec les formules données pour q' et g' que u est solution"... La résolution d'un système 2×2 n'est pas toujours bien faite. Précisons enfin aux candidats que lorsqu'une formule est donnée, il convient de mener tous les calculs précisément et clairement ; un "il vient", "on trouve", "après calculs simples" sera noté 0 mais, plus grave, la bienveillance initiale du correcteur sera entamée...

2°) a) En général bien traitée.

b), c), d) La question demandait un peu de réflexion et une rédaction rigoureuse. Elle a été rarement bien traitée. Ecrire $q(0) \times 0$ ne suffit pas ; encore convient-il d'étudier le cas $q(0) = 0$ et de montrer que "l'on décolle". A ce propos, des graphes illustrant les raisonnements sont toujours appréciés.

Pour la valeur de $q(t_1)$ il ne suffit pas de dire que

$$\begin{array}{l} \bullet \quad \sin(q(t_1)) = 0 \\ \bullet \quad q(t_1) > 0 \quad \text{pour conclure } q(t_1) = p. \end{array}$$

Une fois maîtrisé le b), c) et d) étaient simples.

3°) a) L'expression de $q(T) - T$ est souvent obtenue. Par contre, l'inégalité suivante n'est pratiquement jamais établie correctement. Il n'y a aucune rigueur dans la manipulation des valeurs absolues.

b) La majorité des candidats se ramène au calcul d'une primitive de $t \rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{t}}$. Il n'est pas rare d'obtenir $\text{Arctg}(\sqrt{t})$. Ce qui est aussi désolant que révélateur...

Deuxieme partie

Les rotations du début de (II) ont visiblement dérouté nombre de candidats.

1°) a) Beaucoup d'erreurs de calculs dans l'obtention de $\bar{h}(c)$. L'inégalité $f'(t) \leq \bar{h}(t) \leq f(t)$ est souvent obtenue.

b) Bien traitée lorsqu'elle est abordée.

2°) a) La question demandait un peu d'esprit de synthèse. La rigueur est souvent absente :

- confusion entre zéro de sinus et zéro de Q,
- il convenait de bien préciser sur quel ensemble la fonction cotangente est croissante.

b) Pratiquement pas traitée.

Troisieme partie

Beaucoup de candidats n'ayant pas traité le (II) se sont attaqués à cette partie.

1°) a) "L'analyse de documents" n'ayant pas toujours été effectuée au (II) (2°) b) on assiste pour la construction de v à des interventions chirurgicales :

" $v = u$ si $q \neq 0$; v affine sur les intervalles où $q < 0$ ".

b) Pratiquement tout le monde rectifie la coquille de l'énoncé : a et b sont zéros de v . Cette question est assez bien traitée malgré quelques erreurs de signe en fin de calcul.

c) L'existence de t_0 tient en deux mots : continuité et compact (ou fermé borné). Près de la moitié des candidats ayant abordé cette question invoque le théorème de Rolle. L'obtention des inégalités suivantes manque souvent de soin.

d) Assez bien traitée lorsqu'elle est abordée.

2°) N'est pratiquement pas abordée.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Nous conseillons aux futurs candidats de se fixer deux objectifs majeurs :

- l'acquisition de techniques élémentaires de calcul (trigonométrie, solutions d'équations différentielles simples, recherche de primitives simples, résolutions de systèmes etc.) ;

- la capacité à produire des raisonnements nets et précis, mettant en valeur leurs qualités scientifiques. En particulier lorsqu'une question est "entrevue", un effort de réflexion et de synthèse est nécessaire afin de clarifier la situation et de proposer une rédaction nette. Bien sûr, ceci est coûteux en temps mais aide souvent à la compréhension des questions suivantes. De plus, il est largement préférable (et plus "rentable" en terme de points) de traiter parfaitement quatre questions que de répondre très approximativement à huit questions.