98 MATH. II - PSI

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (FILIÈRE TSI)

CONCOURS D'ADMISSION 1998

MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME ÉPREUVE
FILIÈRE PSI
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

L'emploi de la calculette est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUES II - PSI.
L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière PSI, comporte 6 pages.

Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Soit d un nombre entier strictement positif (d 5 1). Soit M l'espace vectoriel réel des matrices carrées réelles d'ordre d. La matrice unité est notée I_d . Il est admis qu'il existe une application M-$\|M\|_d$ de M dans l'ensemble R^+ telle que le couple (M, $\| \|_d$) soit un espace vectoriel normé et que la norme de la matrice identité I_d soit égale à 1 : $\|I_d\|_d = 1$.

L'espace vectoriel R^d est muni d'un produit scalaire euclidien pour lequel la base canonique de R^d est orthonormée. La norme d'un vecteur x est notée $\|x\|$. A tout vecteur x de l'espace vectoriel R^d, supposé muni de sa base canonique, est associée la matrice colonne X de ses coordonnées. Le produit scalaire de deux vecteurs x et y de R^d est égal à ${}^tX.Y$ (${}^tX$ désigne la transposée de la matrice X). Par abus d'écriture, la norme d'un vecteur x est notée $\|X\|$.

Systématiquement les endomorphismes de R^d, dont les matrices associées dans la base canonique sont les matrices A, B,… de M, sont désignés par a, b,… En particulier la matrice unité I_d de M, est la matrice associée à l'application identique i_d de R^d.

Les propriétés suivantes sont admises :

P.1 : La norme $\| \|_d$ vérifie les inégalités suivantes :

- pour tout vecteur x de R^d, $\|a(x)\|$ 4 $\|A\|_d \|x\|$;
- pour tout couple de matrices A et B de M, $\|A.B\|_d$ 4 $\|A\|_d \|B\|_d$.

P.2 : Soit $(A_n)_{n\ 51}$ une suite de matrices appartenant à M. Soient $a_{ij,n}$, 1 4i 4d, 1 4j 4d, ses coefficients. Pour que la suite des matrices A_n, n 5 1, soit convergente et de limite une matrice A = (a_{ij}), il faut et il suffit que, pour tout couple d'entiers i et j (1 4i 4d, 1 4j 4d) chaque suite $(a_{ij,n})_{n\ 5\ 1}$ soit convergente et de limite a_{ij}.

P.3 : Soient t-M(t) une application continue d'un intervalle fermé [a, b] de R dans M, $m_{ij}(t)$, 1 4i 4d, 1 4j 4d, les coefficients de la matrice M(t) ; les coefficients de la matrice $\int_a^b M(t)\,dt$ sont les intégrales des coefficients de la matrice M(t) : $\int_a^b m_{ij}(t)\,dt$, 1 4i 4d, 1 4j 4d.

Un vecteur x de R^d est dit positif (x 5 0) si et seulement si toutes ses coordonnées sont positives (pour tout i, 1 4i 4d, x_i 5 0). Étant donnés deux vecteurs x et y, le vecteur x est dit plus petit que le vecteur y (x 4y) si et seulement si la différence y – x est un vecteur positif. Enfin, étant donné un vecteur x de coordonnées x_i, 1 4i 4d, |x| est le vecteur positif de coordonnées $|x_i|$, 1 4i 4d. Ce vecteur est noté aussi |X|.

Première partie

Résultats préliminaires

I-1°) <u>Inverse d'une matrice</u> $(\lambda\, I_d - A)$:

Soit A une matrice de M.

a. Démontrer que si le réel λ est une valeur propre de la matrice A, sa valeur absolue est majorée par la norme de A : $|\lambda| \leq \|A\|$.

Dans la suite de cette question, λ est un réel strictement supérieur à la norme de la matrice A : $\lambda > \|A\|$.

b. Démontrer que la matrice $\lambda I_d - A$ est inversible. Soit $(\lambda I_d - A)^{-1}$ la matrice inverse. En déduire que la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda} A$ est inversible.

c. Déterminer, lorsque le réel λ croît indéfiniment, la limite de la matrice $I_d - \frac{1}{\lambda} A$ et de son inverse $(I_d - \frac{1}{\lambda} A)^{-1}$.

d. Déduire des résultats précédents la limite, lorsque le réel λ croît indéfiniment, de la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$.

I-2°) <u>Les matrices</u> B_λ et C_λ :

Étant donnés une matrice A de M et un réel λ strictement supérieur à la norme de la matrice A ($\lambda > \|A\|$), soient B_λ et C_λ les matrices définies par les relations suivantes :

$$B_\lambda = \lambda\,(\lambda I_d - A)^{-1}\ ; \qquad C_\lambda = \lambda^2\,(\lambda I_d - A)^{-1} - \lambda I_d\ .$$

Démontrer que les matrices $B_\lambda - I_d$ et $C_\lambda - A$ sont égales au produit de la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ et respectivement de la matrice A ou A^2. En déduire, lorsque le réel λ croît indéfiniment, qu'elles tendent vers 0. Par suite :

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda = I_d\ ;\quad \lim_{\lambda\to\infty} C_\lambda = A\ .$$

Deuxième partie

Soit A une matrice de M ; cette matrice est associée à un endomorphisme a dans la base canonique de R^d. La matrice A est dite positive si, pour tout vecteur x positif le vecteur a(x) est positif.

II-1°) <u>Matrices positives</u> :

a. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice ; déterminer une condition nécessaire et suffisante vérifiée par les coefficients a_{ij} pour que la matrice A soit positive. En déduire que, si une matrice A de M est la limite d'une suite de matrices positives A_n, n 5 1, la matrice A est elle-même positive.

b. Démontrer que la matrice A est positive si et seulement si, pour tout vecteur x de R^d, la relation $|a(x)|$ 4 $a(|x|)$ (ou encore $|A.X|$ 4 $A.|X|$) a lieu.

c. Soit A la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice inverse A^{-1}. Est-elle positive ? Soit λ un réel ; calculer, lorsqu'elle existe, l'inverse de la matrice $\lambda I_2 - A$; pour quelles valeurs de λ la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est-elle positive ?

II-2°) <u>Une propriété due aux matrices positives</u> :

Soit A une matrice pour laquelle il existe un réel M, strictement supérieur à la norme de A, tel que pour tout réel λ supérieur à M ($\lambda > M$) la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ soit positive. Établir que, pour ces réels λ et tout vecteur x de R^d, l'inégalité

$${}^tX.C_\lambda.X \bullet {}^t|X|.C_\lambda.|X|$$

a lieu ; C_λ est la matrice définie à la question I-2°.

Démontrer que, pour tout vecteur x de R^d, l'inégalité $\big(x \mid a(x)\big) \bullet \big(|x| \mid a(|x|)\big)$ a lieu (ou encore ${}^tX.A.X \bullet {}^t|X|.A.|X|$).

Troisième partie

L'objet de cette partie est d'étudier les matrices dissipatives. Par définition une matrice A, appartenant à l'espace M, est dissipative, si, en désignant toujours par a l'endomorphisme de matrice associée A, pour tout vecteur x de R^d, le produit scalaire des vecteurs x et a(x) est négatif ou nul : $\big(x \mid a(x)\big) = {}^tX.A.X$ 4 0.

III-1°) <u>Exemples de matrices dissipatives</u> :

a. Est-ce que les deux matrices ci-dessous sont dissipatives ? calculer leurs valeurs propres : $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Soit A une matrice dissipative de l'espace M ; démontrer que ses valeurs propres réelles sont négatives ou nulles.

c. Démontrer que, pour qu'une matrice symétrique (${}^tA = A$), appartenant à l'espace M, soit dissipative, il faut et il suffit que ses valeurs propres soient négatives ou nulles. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur une matrice A de M et sa transposée ${}^tA$ pour que la matrice A soit dissipative.

d. Soit A une matrice quelconque de l'espace M ; démontrer que la matrice B définie par la relation $B = A - \|A\|_d\, I_d$ est dissipative.

III-2°) <u>Vecteur propre de certaines matrices symétriques</u> :

Soit A une matrice symétrique telle que, lorsque le réel λ est suffisamment grand la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ soit positive.

a. Démontrer que, si la matrice A est dissipative et si le réel 0 est une valeur propre, il existe un vecteur y positif, différent du vecteur nul, tel que le produit scalaire $\big(y \mid a(y)\big) = {}^tY.A.Y$ soit nul.
Il est admis que ce vecteur y est un vecteur propre de la matrice A.

b. Déduire des résultats précédents que, si s(A) est la plus grande valeur propre de la matrice A, il existe un vecteur propre positif associé à la valeur propre s(A).

c. Exemple : soit B la matrice définie par la relation : $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Déterminer les valeurs propres de la matrice B et la matrice $(\lambda I_3 - B)^{-1}$ lorsque

le réel λ est suffisamment grand. Rechercher un vecteur propre positif associé à la plus grande valeur propre de B.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de rechercher des conditions pour qu'un système différentiel admette des solutions positives.

Étant donnés une matrice A de M, associée à un endomorphisme a de R^d, x_0 (ou X_0) un vecteur de R^d, une fonction continûment dérivable de la demi-droite [0, +•[dans R^d : t-x(t) est solution du système différentiel $S(A,x_0)$ si les deux équations ci-dessous sont vérifiées :

$$S(A, x_0) : \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = a\big(x(t)\big), \text{ pour tout réel t positif ou nul,} \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Dans la suite la fonction t-x(t), définie sur [0, +•[désigne la solution du système $S(A, x_0)$.

IV-1°. <u>Une propriété d'un système différentiel dont la matrice est dissipative</u> :

Soient A une matrice de M, t-x(t) une solution du système différentiel $S(A, x_0)$, déterminer la dérivée de la fonction t-$||x(t)||^2$. En déduire que si la matrice A est dissipative, alors pour tout réel t positif ou nul, il vient :

$$||x(t)|| \ 4 \ ||x_0|| .$$

IV-2°. <u>Positivité d'une solution d'un système différentiel</u> :

Dans cette question la matrice A de M est diagonalisable ; B = $\{Y_1, Y_2,\ldots, Y_d\}$ est une base de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_d$. Soit P la matrice de passage de la base canonique de R^d à la base B.

a. Déterminer l'expression de la solution t-x(t) du système différentiel $S(A,x_0)$. Démontrer que la solution s'écrit : $X(t) = M(t).X_0$ où t-M(t) est une application continûment dérivable de la demi-droite [0, +•[dans M. Donner l'expression de la matrice M(t) à l'aide de la matrice de passage P, de son inverse P^{-1} et d'une matrice diagonale •(t).

b. Démontrer que la matrice M(t) est la limite de la suite des matrices $(I_d - \frac{t}{n} A)^{-n}$, n=1,2,…. lorsque l'entier n croît indéfiniment. En déduire que, si, pour tout réel λ suffisamment grand, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive, alors la matrice M(t) est positive.

c. Soient t-A(t) et t-B(t) deux fonctions continues définies sur la demi-droite [0, +•[à valeurs dans M. Il est admis que, si A(t) et B(t) sont deux matrices semblables : $A(t) = P.B(t).P^{-1}$, où P est une matrice indépendante du réel t, la relation : $\int_0^x A(t)\,dt = P.\left(\int_0^x B(t)\,dt\right).P^{-1}$ a lieu pour tout réel x positif.

Soit toujours M(t) la matrice définie à l'alinéa a ci-dessus. Démontrer, pour tout réel λ strictement supérieur à la norme de A ($\lambda > \|A\|$) et pour tout réel x strictement positif, la relation :

$$\int_0^x e^{-\lambda t} M(t)\,dt = (\lambda I_d - A)^{-1}.\left(I_d - e^{-\lambda x} M(x)\right) .$$

d. Démontrer qu'il existe une constante c telle que la norme $\|M(t)\|$ de la matrice M(t) soit majorée par $c.e^{t\|A\|}$. Déterminer, pour un réel λ strictement supérieur à la norme de A, la limite, lorsque le réel x tend vers l'infini, de l'expression suivante :

$$(\lambda I_d - A)^{-1}.\left(I_d - e^{-\lambda x} M(x)\right) .$$

e. En déduire que, si la matrice M(t) est positive pour tout réel t positif, la matrice $(\lambda I_d - A)^{-1}$ est positive pour des réels λ suffisamment grands .

FIN DU PROBLÈME

FIN DE L'ÉPREUVE