

MATHEMATIQUES

1.2 - Epreuves écrites

1.2.B - MATH. I - filière PC

I) Remarques générales

Le problème propose une modélisation et l'étude mathématique d'un problème concret (une serrure de sécurité). Il s'articule en trois parties.

Avec la présentation d'exemples, la première partie établit une formule de récurrences liant les nombres a_n de n -combinaisons d'ensemble à n -éléments, puis un encadrement de ceux-ci.

Par l'étude de la série génératrice de la suite $(a_n)_{n \geq 0}$, la seconde partie conduit à une expression de a_n à l'aide d'une série.

Enfin, la troisième partie permet d'établir un équivalent de a_n , n tendant vers $+\infty$.

Le problème a permis de tester les candidats sur les aspects suivants :

- leur bon sens au début de la première partie, lors de l'établissement de la formule de récurrence liant les a_n ;
- leur connaissance et maîtrise de points ou techniques essentiels du programme d'analyse : formule de Taylor dans la première partie ; série entière, produit de Cauchy, convergence simple et uniforme de série dans la seconde partie ; comparaison d'une série et d'une intégrale impropre, recherche d'équivalent dans la troisième partie ;
- leur aptitude à mener correctement une démonstration technique.

II) Remarques particulières

Partie 1

1-2. Ces questions permettent de rentrer dans le sujet et posent des problèmes (élémentaires) de dénombrement. La question 1 est la plupart du temps correctement traitée, mais beaucoup de candidats n'ont pas les idées claires pour la question 2 : ils s'emmêlent dans des raisonnements compliqués qui conduisent à des formules fausses, parfois rectifiées (sans justificatif) pour trouver les formules annoncées. Lorsque la question est bien traitée, les candidats font souvent une confusion entre P_l fixé et k fixé au 2b). La définition de C_n^k est ignorée dans certaines copies.

3. Les candidats pensent à mener la démonstration par récurrence, ce qui conduit à majorer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{(\ln 2)^k}{k!}$; beaucoup majorent trop brutalement, ramenant leur démonstration à la majoration de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^k$; ils ne peuvent conclure qu'en invoquant une inégalité fausse ($\ln 2 < \frac{1}{2}$).

4a. Si la question est souvent abordée, de nombreux candidats connaissent mal la formule de Taylor : ils sont incapables d'écrire correctement la formule utilisée (reste intégral, inégalité ou égalité de Taylor-Lagrange). Certains, enfin, invoquent la formule de Taylor-Young, majorant le reste à leur convenance.

4b. La question est rarement traitée correctement : il est naturel d'engager une démonstration par récurrence, mais si on minore b_0 par $\frac{1}{2}$, la minoration obtenue est insuffisante ; certains candidats le

reconnaissent et abandonnent la question, mais trop nombreux sont ceux qui concluent abusivement

$$\left[b_n \geq \frac{1}{2(\ln 2)^n} - \frac{1}{2n!} \text{ donc } b_n \geq \frac{1}{2(\ln 2)^n} \right]$$

Partie 2

1a. De nombreux candidats ne maîtrisent pas la détermination du rayon de convergence d'une série entière. On peut s'étonner du manque de rigueur de certains qui, encadrant incorrectement le quotient $\frac{b_{n+1}}{b_n}$, ne remettent pas en

question leur raisonnement après avoir obtenu un résultat impossible $\left[\frac{1}{\ln 2} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} \leq \frac{1}{\ln 2} \right]$. Parfois, il y a des abus dans les inégalités à cause du signe de x , non précisé ; la notion de convergence absolue semble ignorée. Cependant, même si la démonstration n'est pas menée correctement, le résultat est généralement obtenu.

1b. Le produit de Cauchy est en général connu, mais la détermination de f n'est pas obtenue pour autant.

2. La série étudiée est élémentaire (série géométrique) ; certains candidats ne semblent pas s'en apercevoir. La convergence uniforme s'obtient facilement par convergence normale, pas assez souvent évoquée. Enfin, l'égalité de la fonction f et de la série a lieu sur l'intersection des domaines de définition de celles-ci.

Si la question dérouté une partie des candidats, il est clair qu'une bonne part d'entre eux a été bien formée à ce type de raisonnements.

2c. La plupart des candidats qui traitent la question obtiennent la formule par dérivation terme à terme sans justificatif ; quelques-uns invoquent correctement la convergence uniforme de la série des dérivées.

Partie 3

1. Si le calcul de I_n est très souvent correctement mené, certains ne s'étonnent pas d'obtenir un résultat négatif (ou pouvant l'être). L'intégrabilité de g_n fait apparaître des lacunes chez de nombreux candidats qui écrivent : en $+\infty$, $x^n = o(2^x)$ donc $g_n(x) \sim 2^{-x}$.

2. Seuls quelques-uns se trompent dans le calcul de la dérivée de g_n . L'articulation très précise des questions appelle à utiliser la technique bien classique (et élémentaire) de comparaison d'une somme ou d'une série à une intégrale, éventuellement impropre. Les candidats maîtrisent bien ce genre de raisonnements, mais certains ne sont pas assez rigoureux et se trompent dans leurs encadrements (parfois, les résultats obtenus sont manifestement impossibles, mais les candidats concernés ne s'en émeuvent pas). Les inégalités du d) et l'équivalent du e) n'ont été qu'exceptionnellement établis.