MATHEMATIQUES

1.2 - Epreuves écrites

1.2.D - MATH. II - filière MP

I) <u>Remarques générales</u>

Le problème proposé, divisé en trois parties, faisait essentiellement appel à la notion de convergence uniforme et aux techniques et résultats du programme sur les séries de Fourier.

De longueur très raisonnable, très détaillé dans sa conception, il a permis de déceler d'excellents candidats, certains ayant même réussi à prouver les deux résultats qu'il était demandé d'admettre.

Il s'est révélé parfaitement sélectif, éliminant clairement les candidats aux connaissances et au savoir-faire trop limités.

II) <u>Remarques particulières</u>

I.1) Cette question, presque de cours, rencontrée notamment dans la preuve du théorème de convergence normale sur les séries de Fourier (cf. l'aspect préhilbertien de l^2), était bien traitée par une très large majorité de candidats . A noter que certains ont négligé l'indication de l'énoncé pour lui préférer l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (pourquoi pas !) voire ... la règle de d'Alembert !

I.2.a) Cette question fut abordée par la presque totalité des candidats. A noter du $\frac{3}{24}$ non simplifié .

I.2.b) Pour la continuité de $\tilde{h}$, un dessin aurait peut-être été préférable à de longs développements, souvent peu convaincants. La détermination de sa série de Fourier a fait l'objet de longs calculs et a été trop souvent incorrectement achevée.

I.3) Le résultat à établir, presque du cours, mais qui n'est pas explicitement énoncé dans le programme, qui consiste, en fait, à comparer les coefficients d'une série trigonométrique qui converge uniformément aux coefficients de Fourier de sa somme, en a fait chuter plus d'un. Certains, parmi les meilleurs, se sont fait plaisir, en fin de parcours, à se rappeler la démonstration du résultat admis.

II.1.a) Cette question a été en général sabotée. Sans aller jusqu'à invoquer une conséquence du théorème des accroissements finis, il convenait cependant de prendre le temps de la réflexion et de poser clairement le problème. Une grande majorité s'est contentée de s'assurer de la dérivabilité de $\tilde{f}$ (égalité des dérivées à droite et à gauche en les points de π♦) sans citer le fait qu'a priori $\tilde{f}$ était C^1 par morceaux, ce qui était insuffisant pour sa continue-dérivabilité! Une trop grande précipitation pour avancer dans le problème, a peut-être conduit les candidats à ne pas suffisamment s'intéresser à cette question.

II.1.b) Ici, il suffisait d'invoquer (sans démonstration !) le théorème de convergence normale (que certains nomment "théorème de Dirichlet au sens fort") appliqué à $\tilde{f}$, puis conclure pour f, ce qui a été bien traité par une large majorité (qui a très souvent, certainement inconsciemment, identifié f à $\tilde{f}$) .

II.2) Dans beaucoup de copies, les coefficients de Fourier de $\tilde{f}'$ étaient obtenus en cherchant à la développer en série trigonométrique, par dérivation terme à terme du développement de f, en évoquant juste le fait que f était de classe C^1, ce qui était évidemment insuffisant, puisque la convergence uniforme de sa série dérivée n'était pas assurée. Certains, avec une évidente mauvaise foi, parvenait à l'inégalité attendue sans le passage obligé par l'inégalité de Bessel ou l'égalité de Parseval (ou, bien sûr, il fallait s'y attendre, Perseval , Perceval , Parcevale ... et même ... inégalité d'Hadamard, voire un théorème d'Ostrogradski).

III.1) Alors qu'à la question précédente, beaucoup avaient pensé à invoquer l'égalité de Parseval , les mêmes ne pensaient plus à l'appliquer pour prouver l'appartenance de g_p à ↔ et passaient par l'inégalité fausse

$$\left|g_p'(x)\right|^2 \leq \sum_{n=1}^{p} n^2 \left|b_n\right|^2 \cos^2 nx$$

pour parvenir à l'inégalité attendue.

III.2.a) La plupart des candidats ont supposé que les $b_{r,n}$ étaient, a priori, les coefficients de Fourier en sin de $\tilde{f}_r$, alors que ce résultat provenait de la convergence uniforme de la série trigonométrique définissant f_r et nécessitait donc une justification. A noter que l'énoncé du I.3 se révélait insuffisant pour conclure.

III.2.b) Nulle référence à un vague "Théorème de la double limite" n'était nécessaire ici ! Une simple majoration "uniforme en *r*" d'une somme partielle permettait de traiter l'ensemble de la question.

III.2.c) Question bâclée : là , il s'agissait de prendre un peu de recul et de comprendre ce qui se passait. On a pu lire, ici, n'importe quoi.

III.3) La première partie de la question était donnée ! Quant à la seconde, les justifications manquaient souvent de précision.

III.4.a) Une large majorité a compris que l'inégalité à prouver provenait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (et non pas Schwartz ... comme attendu !) mais on a pu lire trop souvent des affirmations du genre

$$\left|f(x) - f(y)\right|^2 \leq \left(\int_x^y \left|f'(t)\right| dt\right)^2 \leq \int_x^y \left|f'(t)\right|^2 dt \leq y - x$$

III.4.b) Cette question a été très bien traitée par un nombre non négligeable d'excellents candidats. Certains se sont contentés de prouver la convergence simple. D'autres ont donné des solutions un peu compliquées mais qui se tenaient, faisant preuve de culture avec l'évocation d'équicontinuité, de prolongement de fonction uniformément continue sur une partie dense, etc... On a même pu lire l'évocation du théorème d'Ascol (sans i), "vu en cours , mais qui semble hors programme".

III.4.c) Beaucoup de candidats, sans doute pris par le temps, ne l'ont pas résolue correctement. Une suite $(g_r)_{r \geq 0} \in \gamma^{IN}$ étant donnée, il convenait de l'approcher par une suite $(f_r)_{r\geq 0} \in$ ↔^{IN} non pas avec la majoration $\left\|g_r - f_r\right\|_\infty \leq \varepsilon$, *pour* $\varepsilon > 0$ donné, comme on l'a lu souvent, mais avec une suite $(\varepsilon_r)_{r\geq 0}$ tendant vers 0 telle que, pour tout *r*, $\left\|g_r - f_r\right\|_\infty \leq \varepsilon_r$.

III) <u>Conclusion</u>

Une note optimiste pour finir : certes, il y a toujours des irréductibles dont la copie est un brouillon, avec une écriture détestable , une orthographe plus qu'approximative ; on lit toujours des "j'admet", "normallement", "continuement", "adhérance", "therme général" etc... ; on voit toujours des originaux qui tiennent des raisonnements du genre : "Si jamais telle propriété était fausse, ce qui suit n'aurait pas d'intérêt, donc ...". Mais heureusement que tout ceci n'est pas le lot courant. Les candidats font, en général, des efforts pour rendre leur copie claire et soignée. Le niveau d'ensemble laisse une impression satisfaisante.