

# 1 - MATHÉMATIQUES

## 1.1 - Épreuves orales

### 1.1.B - MATHÉMATIQUES - filière PC

#### I) REMARQUES GÉNÉRALES

L'oral 2001 s'est bien déroulé, et les membres du jury ont apprécié la grande qualité des meilleurs candidats.

Cette année, il n'y a pas eu de remarques sur la tenue des candidats. En ce qui concerne la forme de l'oral, on observe toujours une grande disparité dans la qualité technique : les meilleurs ont une bonne élocution, un tableau très bien présenté qui leur permet de mettre en valeur ce qu'ils savent faire, tandis que d'autres écrivent n'importe où, avec un français approximatif, et parlent peu ou pas du tout.

Le rapport de l'épreuve orale de physique décrit les objectifs de cette épreuve. Cette description s'applique très largement à l'épreuve orale de mathématiques.

La principale remarque formulée par les examinateurs est le manque d'autonomie de la plupart des candidats. A l'oral du concours commun, on recherche des candidats présentant un solide bagage scientifique, et des capacités d'adaptation : les candidats recrutés sont destinés à devenir des ingénieurs de haut niveau qui seront amenés dans leur carrière à faire face à des situations nouvelles, inévitables dans un monde en mutation perpétuelle. Les exercices sont donc conçus pour permettre aux candidats correspondant à ce profil de se mettre en valeur. Les types d'exercices proposés sont très nombreux, ce qui assure une quasi-imprévisibilité. Conformément au programme, de plus en plus d'énoncés sont donnés sous forme ouverte, et ne reposent pas sur une simple application de recettes toutes faites.

Les meilleurs candidats en tirent profit, ce qui donne des oraux très vivants et animés. Ces candidats s'appuient la plupart du temps sur une connaissance sans faille du cours ; ils sont capables d'initiatives personnelles et font preuve d'intelligence pendant presque toute l'heure.

A l'autre extrémité du spectre, on trouve des candidats qui ont une connaissance très limitée du cours et une capacité de réaction presque nulle.

Entre les deux, une population de candidats ayant une connaissance réelle mais limitée du cours, à autonomie réduite, souvent capables d'utiliser les indications fournies. Certains manquent de confiance et chaque fois qu'ils écrivent quelque chose, ou émettent une idée, ils attendent l'approbation de l'examineur. Pire, certains attendent que l'examineur leur fournisse une méthode pour ne plus avoir, en quelque sorte, qu'à "remplir les blancs". Cette attitude ne peut que leur nuire. On en trouve également qui sont irréguliers : capables de faire un beau raisonnement à un moment, ils peuvent ensuite se trouver bloqués en raison d'une lacune sur un sujet tout à fait élémentaire, par exemple une simple formule de trigonométrie, ou une primitive de fonction usuelle. Enfin, il faut parler d'une sous-population en expansion, celle des candidats "qui ont des méthodes". Ces derniers n'ont plus besoin de s'occuper vraiment du contenu des énoncés : devant une suite, ils étudient la monotonie puis la convergence. Tant pis si la suite est périodique. Devant un système différentiel, ils calculent les solutions. Qu'importe si la question porte sur le comportement des solutions et peut se résoudre avec un petit raisonnement, sans calculs. S'ils ont à étudier l'intégrabilité d'une fonction, ils cherchent à la majorer par des fonctions prises dans une échelle standard de comparaison, même si la fonction est du type "fonction peigne". Bref, quel que soit le chapitre, ces candidats ont des recettes toutes faites qui leur évitent d'avoir à réfléchir. Cette attitude intellectuelle est incompatible avec les pratiques scientifiques contemporaines, et elle est sévèrement sanctionnée par les examinateurs. On notera également que les remarques de ce paragraphe s'appliquent *mutatis mutandis* à l'oral de physique dont les examinateurs ont dégagé une typologie similaire.

En dehors du manque d'autonomie de beaucoup de candidats, voici les principales évolutions observées :

- Le cours est de mieux en mieux su. C'est bien, mais cette connaissance des énoncés ne s'est pas accompagnée chez tous d'un changement dans la manière de résoudre les exercices : quand les

candidats connaissent les théorèmes, on aimerait qu'ils s'en servent! On trouvera ci-dessous une liste détaillée de questions que beaucoup d'entre eux continuent d'étudier comme autrefois, sans profiter de la rigueur liée à l'utilisation d'énoncés précis.

— Les calculs, qu'ils soient ou non assistés par la machine, posent de plus en plus de problèmes. Menés trop fréquemment avec maladresse, ils posent à certains candidats des difficultés inextricables. Une expérience insuffisante de la conduite des calculs les prive de tous les raccourcis d'usage, de toute prévision de la forme finale, et les empêche d'effectuer les transformations nécessaires à l'obtention d'un résultat. A cette absence de "culture du calcul", il faut ajouter une méconnaissance préoccupante des formules (de toutes les formules, et pas seulement des formules de trigonométrie). Ce sont souvent les mêmes candidats qui ne peuvent compenser leurs lacunes théoriques par une bonne utilisation de la machine : ils ne savent bien souvent pas s'en servir. La fonction partie entière, les coefficients binomiaux sont très recherchés au moment de l'oral. On en a même vu des candidats qui ignoraient qu'il y avait un menu leur permettant de choisir les options graphiques comme les domaines représentés ou le pas de discrétisation !

— La plupart des candidats sont maintenant informés de la méthode de résolution indiquée en tête du programme des classes préparatoires : analyse du problème, expérimentation, conjecture, solution mathématique. C'est bien, mais on observe de nouvelles difficultés :

\* Pour jouer pleinement son rôle, une expérimentation doit être suffisamment poussée ; non seulement elle doit permettre de formuler une conjecture motivée sur le résultat final, mais elle doit aussi permettre de comprendre le "mécanisme" du phénomène étudié pour élaborer des lemmes intermédiaires dont la preuve constituera la démonstration du résultat final. Par exemple, le calcul de trois termes d'une suite ne permet généralement pas d'en tirer une conjecture sur le comportement asymptotique.

\* Parmi les fautes nouvelles, citons les erreurs de lecture sur l'écran des calculatrices lorsqu'un résultat en dépasse la largeur, et de manière chronique, les graphes aberrants dus à des erreurs d'échelle, et bien souvent à un pas d'incrémentement du paramètre insuffisant.

\* Nous avons eu la surprise de constater que certains candidats qui avaient effectué une bonne partie expérimentale étaient incapables de formuler dans un français mathématique correct les conjectures qu'ils voulaient en tirer. Nous avons essayé de savoir s'il s'agissait d'un problème général d'expression, ou d'une lacune dans la formation scientifique, et nous avons recherché une corrélation avec leur oral de français. Le faible effectif n'a pas permis d'arriver à une conclusion statistiquement significative. Cette étude a toutefois permis de mettre en évidence la médiocrité de l'expression orale et de la compréhension de la langue de trop de candidats.

Il doit être bien clair que les candidats doivent posséder une bonne connaissance du langage scientifique courant. Même si des notions élémentaires sont au programme des classes antérieures aux classes préparatoires, elles doivent être connues des candidats : on utilise sans les redéfinir les triangles, les rectangles et les carrés. Le problème du vocabulaire approximatif ou trop réduit des candidats a été mis en évidence dans les oraux de physique, de français et de mathématiques, et l'on pourra consulter à ce sujet les rapports sur ces deux épreuves.

La langue est une source fréquente de problèmes, d'une part à travers une imprécision de certains candidats (exemple : confusion entre 'déterminant' et 'discriminant', "interversion des signes somme et intégrale", parler de série lacunaire pour une série du type  $\sum a_n x^{2^n}$ ), d'autre part en raison d'une méconnaissance de la terminologie utilisée dans le programme. Les questions de cours sont posées dans les termes exacts du programme, et certains candidats n'ont pas pu répondre parce qu'ils n'avaient pas appris les noms des énoncés. On trouvera ci-dessous une liste détaillée.

Quelques candidats confondent 'condition nécessaire' et 'condition suffisante', 'il faut que' et 'il suffit que'. Pour certains, il s'agit plutôt d'un problème de langage approximatif, mais pour d'autres cette confusion traduit une réelle incapacité à effectuer des raisonnements. On a vu des raisonnements par l'absurde... vraiment absurdes.

Le jury a pu constater qu'un grand nombre de candidats n'avaient pas eu accès aux rapports de concours. Rappelons que le rapport est envoyé dans chaque classe, à destination d'une part des professeurs, d'autre part des

élèves et figure sur Internet (<http://csmp.enst.fr>). Il conviendrait que les professeurs s'assurent que ces derniers puissent aussi avoir accès au rapport.

## **II) REMARQUES PARTICULIERES**

Voici une liste de théorèmes dont l'usage se réduit trop souvent à l'énoncé.

Théorème de changement de variable. A son propos, rappelons que le théorème du programme ne parle pas de "C<sup>1</sup>-difféomorphisme".

Théorème donnant la matrice jacobienne d'une fonction composée. C'est grâce à lui que les candidats peuvent calculer les dérivées partielles.

Définition du rayon de convergence. Le programme n'imposant pas une définition particulière, de plus en plus de professeurs prennent astucieusement comme définition du rayon la borne supérieure, dans  $\overline{\mathbb{R}}$ , de l'ensemble des réels  $r$  pour lesquels la suite  $(a_n r^n)$  est bornée. Cette définition 'à la mode' est très puissante, et permet la résolution rapide d'un grand nombre d'exercices. Pourquoi faut-il que des candidats donnant cette définition du rayon soient 'frappés par la malédiction de d'Alembert' (hors programme dans le cas des séries entières) ?

Méthode du pivot de Gauss pour la résolution de systèmes. Des candidats capables de justifier rigoureusement la validité des opérations de pivot utilisent sur les exemples la méthode de substitution pour laquelle ils sont incapables de formuler un théorème justifiant à chaque étape l'équivalence du nouveau système avec l'ancien. A propos de la méthode du pivot, signalons que les petites questions concrètes liées à cette méthode en plongeant beaucoup dans l'embarras : déterminer une base de l'image et une base du noyau d'une application linéaire donnée par sa matrice, déterminer une base d'un sous-espace vectoriel dont on a un système d'équations cartésiennes, donner un système d'équations cartésiennes d'un sous-espace vectoriel dont on possède une partie génératrice, etc.

Voici une liste de questions de cours auxquelles les étudiants n'ont pu répondre, parfois parce qu'ils ne connaissaient pas le nom du théorème.

- Théorème des segments emboîtés
- Algorithme d'exponentiation rapide
- Théorème de d'Alembert-Gauss
- Algorithme de Horner
- Inégalité de Taylor-Lagrange
- Formule de Taylor-Young
- Formule de Taylor avec reste intégral
- Théorème de caractérisation des fonctions dérivables strictement croissantes
- Critère de Cauchy pour la convergence des séries numériques

Voici à présent des remarques ne relevant d'aucune des grandes catégories précédentes.

En intégration, les théorèmes de convergence sont de mieux en mieux utilisés. Le couplage 'théorème de convergence dominée/caractérisation séquentielle de la limite' est utilisé, mais en contrepartie, il y a des candidats qui se croient obligés d'établir une relation de domination pour démontrer l'intégrabilité sur un segment d'une fonction continue. Qu'elles soient utiles ou non, les relations de domination proposées sont souvent fantaisistes, et bien peu pensent à les vérifier à l'aide de leur calculatrice. Le théorème 'f est intégrable donc bornée (ou tend vers 0)' fait de la résistance. La justification des changements de variable à l'aide du théorème idoine est souvent perçue comme une lubie d'examinateur, et celui-ci devient franchement désagréable lorsqu'il exige une distinction claire entre intégrales et primitives, fonctions intégrables et fonctions primitivables, intégration et primitivation. Cette confusion a également été rapportée par les examinateurs à l'oral de physique. D'autres critiques communes aux deux oraux ont concerné des connaissances insuffisantes et floues sur les fonctions de plusieurs variables. On pourra consulter le rapport de l'oral de physique sur ce point.

Les idées floues et le manque de précision se rencontrent dans tous les chapitres avec ce que l'on pourrait décrire comme une confusion entre relation stricte et relation large. Voici quelques exemples : invocation de la monotonie (au lieu de la stricte monotonie) d'une fonction  $f$  dans l'étude du nombre de solutions de l'équation

$f(x) = 0$  ; confusion entre  $u_n > 0$  et  $u_n \geq a > 0$  ; confusion entre convergence uniforme sur un disque ouvert et convergence uniforme sur tout compact inclus dans ce disque ouvert.

On a vu plus haut les difficultés de certains candidats dans l'étude de problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie. Les espaces de dimension infinie posent, eux aussi, des problèmes.

Que ce soit en première ou en seconde année, le titre du programme associe toujours algèbre linéaire et géométrie affine. Cette association, précisée par une demande d'étude conjointe, n'est pas souvent effectuée. Si on leur donne un énoncé sous forme sectorielle parlant par exemple de combinaisons linéaires de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ , ils écrivent sans difficulté  $u + v$ . Mais si l'énoncé parle de barycentre d'éléments de  $\mathbb{R}^n$ , on voit immédiatement apparaître des points  $A, B$ , de coordonnées  $a$  et  $b$ , puis des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ . A ce moment, on dirait que tous les outils étudiés durant les années de préparation s'effacent pour laisser la place à ceux du secondaire.

Cette difficulté d'adaptation se retrouve dans d'autres situations : questions de nature géométrique, mais pour des normes non euclidiennes, courbes définies à l'aide des nombres complexes, intégrales considérées comme des applications linéaires sur des espaces de fonctions, convergence en moyenne quadratique des séries de Fourier.