# MATHEMATIQUES

## 1.1 – Epreuves orales

## 1.1. B - MATHEMATIQUES - filière PC

### I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

L'objectif de l'oral de mathématiques est multiple :

- il permet de vérifier que les notions étudiées en classes préparatoires sont connues et assimilées,
- il sert à tester la capacité des candidats à :
  - appréhender une situation nouvelle
  - intégrer une information complémentaire
  - s'exprimer et expliquer les initiatives prises pour surmonter la difficulté.

En conséquence, les questions posées sont diverses et de nature très différente. Il peut s'agir de questions de cours, d'exercices classiques utilisant notamment des calculs (séries, intégrales, algèbre linéaire) ou d'exercices exigeant peut-être moins de connaissances mais davantage de réflexion ou d'analyse. (Discussion de cas suivant la valeur d'un paramètre, par exemple).

Le candidat ne doit pas systématiquement se sentir gêné s'il ne parvient pas à résoudre certains des exercices proposés : cela peut être dû à la nature de ceux-ci, qui permettront plutôt à l'examinateur de déterminer l'aptitude du candidat à la réflexion et au dialogue constructif.

En ce qui concerne les questions proches du cours (de première et seconde années), l'ensemble des notions du programme est susceptible d'être utilisé : il est donc fortement déconseillé de « faire des impasses ». Toutefois, en calcul différentiel et en géométrie, le niveau de technicité requis n'est pas élevé et ne doit pas effrayer les candidats. (Une liste indicative de questions posées en géométrie figure en annexe). L'objectif est de vérifier que les candidats, futurs ingénieurs, ne manquent pas de bon sens.

Pour cette session 2002, le niveau moyen d'expression des candidats est tout à fait convenable : attitude ouverte, volontaire, accueil réfléchi des indications. Dans ces conditions, les candidats muets, attentistes et dédaignant les informations nouvelles sont repérés immédiatement et sanctionnés. (Toutefois, la stratégie qui consiste à monopoliser la parole pour ne rien dire, ou tout et son contraire, n'est pas non plus payante).

Globalement, le cours de seconde année est connu (parfois plus le détail des énoncés que les principes et méthodes : on peut attendre des candidats plus de recul sur l'utilité de tel ou tel théorème ou de tel ou tel procédé : diagonalisation…). Toutefois, de nombreux candidats négligent de donner une justification quelconque de leur démarche (dérivation d'une fonction définie par une intégrale…) ou de <u>démontrer</u> la validité de leurs hypothèses ( « comme *u* est diagonalisable »…).

Le point négatif le plus évident est l'incapacité fréquente à mener un calcul de plus d'une ligne, surtout s'il comporte de la trigonométrie (cos(2a) = ?) ou l'évaluation d'une intégrale $\left(\int_0^u \frac{1}{\sqrt{1+t}}dt = ?\right)$ ou de la somme d'une série $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n ...\right)$. Le fait qu'une minorité non négligeable ait acquis de bon automatismes dans ce domaine incite à recommander à tous de s'exercer (sans que cette remarque remette en cause l'utilité des calculatrices) ; on constate par exemple que les candidats sachant faire un développement limité et ceux ayant le sens de l'analyse sont les mêmes.

L'éventail des notes reflète celui des performances : il est très large. Entre les candidats médiocres et à la logique floue (rares, il est vrai) et les brillants sujets, le jury rencontre une masse (la moitié de l'effectif environ) de candidats qui pourraient mieux faire : ou bien ce sont des élèves vifs et astucieux qui manquent de savoir faire ou bien ce sont des élèves studieux et appliqués qui manquent de maturité et parfois de bon sens.

## II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Cette partie sera par nature plus critique : elle consiste à relever les erreurs usuelles ou inadmissibles (ou les deux).

<u>Les perles classiques</u> (mais le jury est en droit de se lasser)

a) $f-g \xrightarrow[+\infty]{} 0$ donc $f \underset{+\infty}{\sim} g$ (f et g tendent vers 0 en + ∞).

b) $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur ]-R, R[ (« Mais attention pas sur $[-R, R]$ » ajoute-t-on souvent).

c) $\sum f_n$ converge uniformément sur [0, A] pour tout A donc sur [0, +∞ [.

d) *f* est intégrable sur [0,+ ∞ [ (ou intégrable positive) donc $\lim\limits_{y \to +\infty} f(x) = 0$

e) Dans des écritures formelles, on ajoute des endomorphismes et des nombres, on multiplie des vecteurs entre eux…

f) « an + by + cz = d » est reconnu comme l'équation d'une droite (c'est systématique si c=0).

g) Sans oublier les ridicules duettistes : $f(x) = \int_0^x f'(t)dt \ et \frac{d}{dx}(\int_0^x f(t)dt) = f(x) - f(a).$

<u>Les connaissances inexistantes bien qu'élémentaires</u>

a) « Je ne connais pas $\sum_0 \frac{1}{2^n}$ et ne vois pas comment le calculer ».

b) Incapacité à tracer la courbe d'équation $"x^2 - y^2 = 1"$.

c) ln est intégrable sur [0,1] ?

d) $\lim\limits_{t \to 1} \frac{\ln t}{t-1} = ?$

e) Mise sous forme canonique d'un trinôme du second degré : l'équation est traitée à coup de discriminant (appelé régulièrement déterminant) ce qui n'est pas faux mais pas toujours le plus facile à analyser.

(Exemples : - Pour quels x de R $\int_0^\Pi \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)dt$ a-t-elle un sens ?

- Résoudre $A^2 - 2A + 10 I_2 = 0 \, ayant \, résolu \, A^2 = -I_2$).

f) La dimension 2 en algèbre linéaire doit être bien assimilée.

g) On est censé identifier les endomorphismes diagonisables n'ayant qu'une valeur propre.

h) « Si A est dans Mn (IR) et rang (A) < n alors 0 est valeur propre de A » est un raisonnement rarement spontané !

i) On est censé savoir résoudre dans $\not\subset$ : $X^{2n} = 1$.

j) Si $f$ est paire les $a_n$ valent $\dfrac{2}{\Pi}\int_{d}^{\Pi} f(t)\cos(nt)dt$ (Même si la formule $a_n \dfrac{1}{\Pi}\int_{0}^{2\Pi} f(x)\cos(nt)\,dt$ est correcte, elle est inadéquate quand $f$ est donnée uniquement sur $[0,\Pi]$).

k) Si $|a_n| \leq |b_n|$ *alors* $R_a \geq R_b$ (c'est utile).

l) La détermination de dim ker (A - $xI$) est problématique. Les discussions suivant le rang aussi.

Exemple : A = $\begin{pmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{pmatrix}$ CNS de diagonalisabilité ?

<u>Quelques remarques plus subtiles</u>

a) $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ est un exemple, non trivial mais intéressant, en calcul intégral. Il est conseillé d'avoir un peu réfléchi à ce phénomène.

b) Le sens de $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}$ n'est pas très clair. On a le droit d'utiliser de telles écritures à condition de pouvoir renseigner l'examinateur sur ce que cela veut dire.

c) On a toujours tr A = $\sum \gamma_i$ même si A n'est pas diagonisable : (dans $\not\subset$ ) c'est l'une des relations coefficients – racines pas trop compliquées.

d) Dans certains exercices on développe une fonction en série entière en cherchant une E.D. satisfaite par la fonction. Pour pouvoir conclure, il est souvent indispensable (et oublié) d'invoquer un théorème d'unicité de la solution d'une E.D.

e) Il n'y a aucun théorème au programme permettant de dire « comme f(x) = $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\cos(nx)}{n^2+1}$ la série de Fourier de $f$ est $\sum \dfrac{\cos(kx)}{k^2+1}$ » ; ce qui ne veut pas dire que c'est faux (ou indémontrable). Les candidats invoquent un fumeux théorème d'unicité du développement en série de Fourier.

f) Les candidats inscrivent souvent des flèches du type $\leftrightarrow$ pour les tangentes en une courbe paramétrée ; or, il y a un sens de parcours sur une telle courbe (c'est un détail utile).

## III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Le meilleur conseil est de lire les rapports antérieurs et notamment le rapport de l'épreuve de l'oral PSI de la session 2001. La lecture des parties I et II de ce rapport peut aussi être utile.

On ne saurait trop conseiller aux candidats de relire l'intégralité de leur <u>cours</u> de maths (expurgé des preuves de plus de 10 lignes) et de passer du temps à comprendre les exemples qui y figurent.

Refaire des exercices qu'on sait déjà traiter est gratifiant mais n'apporte rien.

Pour la préparation de l'oral, il peut être bénéfique de travailler à deux, de se poser des questions et de faire l'effort de répondre clairement au partenaire.

## ANNEXE

Cette annexe est faite pour rassurer les candidats et leur donner une idée de l'orientation qu'ils doivent donner à leur réflexion quand il s'agit d'algèbre dans $R^2 \; ou \, R^3$).

Quelques questions posées en géométrie :

a) Donner la matrice de la projection orthogonale sur l'objet d'équation x-y+z=0 (dans la base canonique).

b) Soient $D_1\,,D_2$ d'équations respectives $\begin{cases} x+2y-2=0 \\ x+3y-5z+2=0 \end{cases}$ et $\begin{cases} 2x+3y+2z-3=0 \\ y-4z+5=0 \end{cases}$.

Montrer que $D_1 \; et \, D_2$ sont parallèles et donner une équation cartésienne du plan les contenant.

c) Calculer $\max\limits_{\Delta} \; (y-x)^3$ +6xy. ($\Delta = \{(x,y) \,/\, -1 \leq x \leq y \leq 1\}$)

d) Tracer $\varphi = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \, x^2+y^2 = 4z^2 \right\} \quad 0 \leq z \leq 1$ et calculer le volume intérieur.

e) 1- Tracer $\varphi = \left\{ M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / \, x^2+y^2-z^2 = 1 \right\} \quad A = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2- A votre avis, si D est une droite combien peut-il y avoir de points dans $D \cap \varphi$ ?

3- On admet que D est tangente à $\varphi$ ssi $D \cap \varphi$ est un singleton. Chercher une équation cartésienne de la réunion des droites passant par A et tangentes à $\varphi$ .

On peut poursuivre et identifier le cône obtenu.

f) Tracer $\begin{cases} u = \dfrac{t}{1-t^2} \\ y = \dfrac{t^2}{1-t^2} \end{cases}$, à la fin : reconnaître la courbe et en donner une équation cartésienne.

g) Etude de la branche asymptotique de la courbe d'équation en polaires $r = \dfrac{1}{1-2\cos\theta}$.

A la fin : ce type de courbe en polaires ne vous rappelle-t-il rien ? Penser à la physique.

Nous souhaitons terminer ce rapport par une remarque un peu hors sujet.

Le nombre de candidat<u>es</u> reste faible (entre 1/4 et 1/5 du total selon les estimations des examinateurs). Or, leur prestation orale n'est pas en moyenne inférieure à celle de leurs collègues masculins et leurs capacités scientifiques sont tout aussi réelles. D'où l'information suivante : les études scientifiques sont ouvertes à tous ceux et à <u>toutes celles</u> qui ont un intérêt pour ce type de disciplines, et qui sont prêts à consacrer un minimum de leur temps à réfléchir, apprendre et progresser.